2. Abzalilov D. F., Shirokova E.A. *The approximate conformal mapping onto simply and dou- bly connected domains* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62. – № 4. – P. 554–565

3. Абзалилов Д.Ф., Широкова Е.А. *Метод приближенного конформного отображения канонических областей на односвязные и двусвязные области* // Матер. межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Казан. ун-т; изд-во АН РТ, 2016. – С. 77–78.

4. Aptekarev A. I., Yattselev M. L. *Approximations of algebraic functions by rational ones – functional analogues of diophantine approximants* // Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2016. – P. 1–23.

5. Aptekarev A. I., Yattselev M. L. *Pade approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials* // Acta Math. – 2015. – V. 215. – P. 217–280.

CONTINUOUS FRACTIONS AND CONFORMAL MAPPINGS

P.N. Ivanshin

We constuct a method of fractional polynomial conformal mapping of the unit disc onto a domain with acute internal angles.

Keywords: conformal mapping, fractional polynomial, convergence.

УДК 514.774

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА ФАНТОМНОМ СКАЛЯРНОМ ПОЛЕ С САМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев[1], А.А. Агафонов[2]

1 *ignatev-yurii@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *a.a.agathonov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

На основе качественного анализа космологических моделей с фантомными скалярными полями с самодействием выявлены и уточнены их отличительные особенности.

Ключевые слова: фантомное скалярное поле, качественный анализ.

Функция Лагранжа фантомного скалярного поля с массой m и самодействием имеет вид:

$$L = -\frac{1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right),$$

где α – константа самодействия.

Выпишем самосогласованные уравнения пространственно-плоской космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

– уравнение Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4 + \Lambda \qquad (1)$$

и уравнение массивного фантомного скалярного поля с кубической нелинейностью:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_*^2\Phi = 0. \qquad (2)$$

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна через функции Φ, $\dot{\Phi}$, переходя к безразмерному комптоновскому времени ($mt = \tau$) и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(t)$, приведем уравнение поля к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости $\{\Phi, Z\}$:

$$\Phi = x;\ Z = y; P(x,y) = y;\ Q(x,y) = -\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - y^2 + x^2 + \frac{\alpha_m}{2}x^4}\,y + x + \alpha_m x^3. \qquad (3)$$

Особые точки динамической системы определяются уравнениями (см., напр., [1]):

$$M:\ P(x,y) = 0;\ Q(x,y) = 0. \qquad (4)$$

При любых значениях α_m и $\Lambda_m \geq 0$ система алгебраических уравнений имеет одно тривиальное решение:

$$x = 0; y = 0\ \Rightarrow M_0(0,0). \qquad (5)$$

В случае $\alpha_m < 0$ кроме того, возможны и нетривиальные симметричные решения:

$$x = x_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{-\alpha_m}}; y = 0 \quad \Rightarrow M_\pm(x_\pm, 0). \qquad (6)$$

Вычислим производные функций (3) в нулевой особой точке (5) при $\Lambda_m > 0$:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_0} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_0} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} = -\sqrt{3\Lambda_m}.$$

Таким образом, получаем характеристическое уравнение (см. [2]):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m + 4}}{2},$$

так что:

$$\lambda_+\lambda_- = -1 \qquad (7)$$

– оба собственных значения вещественны и имеют противоположные знаки. Нетрудно видеть, что собственные векторы λ-матрицы ортогональны:

$$\mathbf{u}_\pm = (\lambda_\pm, 1) \Rightarrow (\mathbf{u}_{+,}\mathbf{u}_-) = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, согласно качественной теории динамических систем на плоскости исследуемая нами динамическая система в случае $\Lambda_m > 0$ всегда имеет *седловую особую точку* (4), которая является *неустойчивой при любом направлении времени*. В случае $\alpha > 0$ эта точка является единственной особой точкой динамической системы.

Производные функций (3) в особых точках (6) при $\Lambda_m > 0$ равны:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_\pm} = 0; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_\pm} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_\pm} = -2; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_\pm} = \sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m}}.$$

Характеристические уравнения для обеих особых точек совпадают и собственные точки имеют один тип:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda-\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}-\dfrac{8}{3}}}{2}. \quad (9)$$

Подкоренное выражение в первом члене (9) строго больше нуля, поэтому возможны три случая (см. [3]):

1) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 > 0$ – тогда оба собственных значения вещественны и отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих (устойчивых) невырожденных узла*. Все фазовые траектории в окрестности таких особых точек при $t \to \infty$ входят в эти точки и кроме двух исключительных касаются собственного вектора минимальной длины. Собственные векторы снова определяются формулой (8), в которую необходимо подставить соответствующие собственные значения из (9). Нетрудно показать, что таким собственным вектором минимальной длины является $\mathbf{u}_+$.

2) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 = 0$ – тогда оба собственных значения отрицательны и равны. В этом случае решение содержит *два симметричных вырожденных узла*.

3) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 < 0$ – тогда оба собственных значения комплексно сопряженные, причем их действительные части отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих фокуса*.

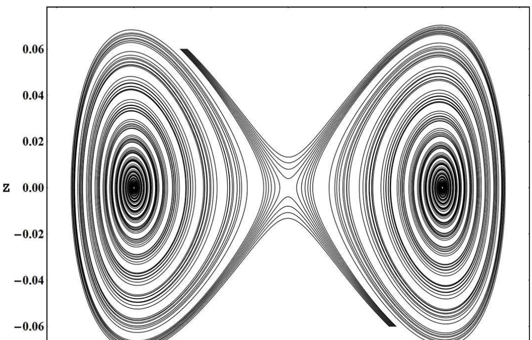

Рис. 1. Фазовый портрет системы для случая $\alpha = -100$; $\Lambda = 0.00001$; $\{\Phi(0) = -0.07 + (j-1) * .0005, j = 1..10; Z0 = 0.06\}$, $\{\Phi(0) = 0.07 + (j-1) * .0005, j = 1..10; Z0 = -0.06\}$; $t = 0 \div 90$

Литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека”. Вып. 11.* – М.: Наука, 1989. – 489 с.

2. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2016. – Вып. 4. – С. 52–61.

3. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. II. Сравнительный анализ моделей с классическим и фантомным полями* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2017. – Вып. 1. – С. 46–65.

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE COSMOLOGICAL MODEL
BASED ON PHANTOM SCALAR FIELD WITH SELF-ACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

On the basis of qualitative analysis, we have identified and clarified the distinctive features of cosmological models with phantom scalar fields with self-interaction.

Keywords: phantom scalar fields, quality analysis.

УДК 517.53

О ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ БАЗИСОВ ИЗ ЭКСПОНЕННТ И ИЗ ЗНАЧЕНИЙ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕГО ЯДРА

К.П. Исаев[1], А.В. Луценко[2], Р.С. Юлмухаметов[3]

1 *orbit81@list.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)
2 *lutsenko.av@ya.ru*; Башкирский государственный университет (БашГУ)
3 *yulmukhametov@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)

Доказано, что безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имеют порождающую функцию тогда и только тогда, когда пространство H устойчиво. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций. Функциональность понимается в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \longrightarrow f(z),\ z \in \mathbb{C}$, непрерывны. В силу самосопряженности гильбертовых пространств эти функционалы порождаются элементами пространства H — $k_z(\lambda)$:

$$\delta_z(f) = f(z) = (f(\lambda), k_z(\lambda))_H,\ \forall f \in H.$$

Функция $K(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H, и этот объект подробно изучен в [1]. Данная работа посвящена вопросам, связанным с базисами и безусловными базисами из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k),\ \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in$